
Contrôle continu 4 - décembre 2024 (1h30)

Exercice 1. (4 points)

Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 défini par :

$$F = \{(a + 2b + c, a + 3b + 4c, a + b + 3c, 3a + 4b + 7c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

1. Trouver une base de F et donner sa dimension.
2. Soit $G = \text{Vect}(0, 0, 1, 0)$, calculer $F \cap G$.
3. Donner un supplémentaire à $F + G$ dans \mathbb{R}^4 .

Exercice 2. (5 points) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A , et en déduire toutes les valeurs propres de A . Justifier que la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} .
2. Déterminer les sous-espaces propres associés.
3. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $P^{-1}AP = D$.
4. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_2 \end{cases}, \quad \text{avec } x_1, x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivables.}$$

Indication : on pourra poser $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = P^{-1}X$, et montrer dans un premier temps que Y satisfait le système différentiel $\frac{dY}{dt} = DY$.

Exercice 3. (5 points)

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 2e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Donner la matrice B de u dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(u)$. L'endomorphisme u est-il injectif? Peut-il être surjectif? Quel est son rang?
3. Donner deux valeurs propres évidentes de u . En déduire la valeur de la troisième.
4. Montrer que u est diagonalisable sur \mathbb{R} .
5. Montrer que $X(X - 2)$ est un polynôme annulateur de B . En déduire B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. (6 points) Soit

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice C est-elle inversible? Déterminer son rang.
2. En déduire que 0 est une valeur propre de C .
3. Calculer le polynôme caractéristique de C , et en déduire toutes les valeurs propres de C , avec leur ordre de multiplicité.
4. Déterminer les sous-espaces propres associés. La matrice C est-elle diagonalisable? Trigonalisable?
5. Déterminer P inversible et T triangulaire telles que $P^{-1}CP = T$.